7 класс

7.1. В записи $\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}$ расставьте знаки действий и, если нужно, скобки так, чтобы значение получившегося выражения равнялось 2.

Ответ: например, $\frac{1}{4} : \frac{1}{4} + \frac{1}{4} : \frac{1}{4} = 2$ или $\frac{1}{4} : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{4} = 2$.

Существуют и другие решения.

+ *приведен верный ответ* (*или более одного верного ответа*)

± *вместе с верным вариантом указан и неверный*

– *приведен неверный ответ или ответ отсутствует*

Наличие лишних скобок, не влияющих на порядок действий, не меняет критериев оценки решения.

7.2. Собираясь в школу, Миша нашел под подушкой, под диваном, на столе и под столом все необходимое: тетрадь, шпаргалку, плеер и кроссовки. Под столом он нашел не тетрадь и не плеер. Мишины шпаргалки никогда не валяются на полу. Плеера не оказалось ни на столе, ни под диваном. Что где лежало, если в каждом из мест находился только один предмет? Ответ объясните.

Ответ: тетрадь была под диваном, шпаргалка — на столе, плеер — под подушкой, кроссовки — под столом.

Решение задачи может быть оформлено различными способами.

Первый способ. По условию, плеер нашелся не под столом, не на столе и не под диваном. Значит, плеер мог быть только под подушкой. Поэтому шпаргалка под подушкой лежать не могла. Но она не валялась и на полу (то есть, ее не было ни под столом, ни под диваном). Следовательно, шпаргалка лежала на столе. Тетрадь не лежала под столом, значит, ей осталось только место под диваном. Тогда под столом могли быть только кроссовки.

Возможен и другой порядок рассуждений, при котором сначала определяется местонахождение кроссовок, а затем — плеера.

Второй способ. Составим логическую таблицу: каждому столбцу соответствует предмет, каждой строке — местонахождение. Если из условия следует, что предмет не может находиться в определенном месте, то на пересечении соответствующих строки и столбца ставим минус. Если предмет именно в этом месте и находится, то ставим плюс. В каждом столбце и в каждой строке должен быть ровно один плюс.

Сначала, в соответствии с условием, расставим минусы:

	Тетрадь	Шпаргалка	Плеер	Кроссовки
Под подушкой				
Под диваном		–	–	
На столе			–	
Под столом	–	–	–	

Поставим теперь два плюса в единственно возможных местах: в третьем столбце и в четвертой строке. Это означает, что плеер находится под подушкой, а под столом могут быть только кроссовки. Заполнив минусами оставшиеся клетки в столбце кроссовок и в строке «Под подушкой», видим, что под диваном может быть только тетрадь, а шпаргалка может лежать только на столе:

	Тетрадь	Шпаргалка	Плеер	Кроссовки
Под подушкой	–	–	+	–
Под диваном		–	–	–
На столе			–	–
Под столом	–	–	–	+

Третий способ. Решение может быть оформлено в виде графа. Роль минусов играют штриховые линии, а плюсов — сплошные. После проведения всех штриховых линий в соответствии с условием получим рис. 7.2а.

Из него видно, что плеера нет ни на столе, ни под столом, ни под диваном; он может лежать только под подушкой. А под столом не может быть ничего, кроме кроссовок.

Проводим сплошные линии от плеера «под подушку», а от кроссовок — «под стол» (см. рис. 7.2б). Из получившегося рисунка ясно, что под диваном может найтись только тетрадь, а на столе лежит шпаргалка.

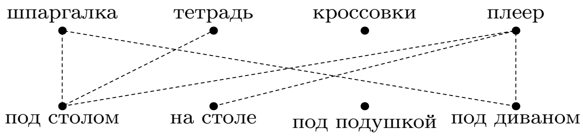


Рис. 7.2а

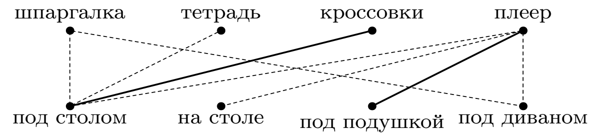


Рис. 7.2б

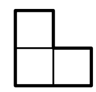
$+$ *получен верный ответ, который обоснован любым из способов: словесными рассуждениями, графической схемой, логической таблицей и пр. (при наличии таблицы или графа словесные пояснения необязательны)*

$\mp$ *верно определено и обосновано местонахождение одного или двух предметов, а места остальных перепутаны или вовсе не установлены*

$\mp$ *приведен только верный ответ*

$-$ *в ответе содержится хотя бы одна ошибка, а обоснования отсутствуют*

7.3. Можно ли сложить какой-нибудь квадрат из трехклеточных уголков (см. рис.)?



Ответ: да, можно. Например, см. рис. 7.3а.

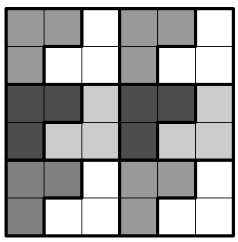


Рис. 7.3а

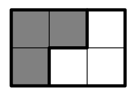


Рис. 7.3б

Комментарий. Из двух уголков можно сложить прямоугольник 2×3 (см. рис. 7.3б), а из таких прямоугольников уже легко сложить квадраты со стороной, кратной шести.

$+$ *приведен верный пример квадрата с разбиением его на заданные уголки (или более одного верного примера)*

$+$ *объяснено, как из данных уголков можно сложить прямоугольник 2×3, а затем из этих прямоугольников получить квадрат (независимо от наличия поясняющего чертежа)*

$\pm$ *вместе с верным примером приведен и неверный*

$-$ *нет ни верного примера, ни пояснения, как его построить*

7.4. Малыш подарил Карлсону 111 конфет. Сколько-то из них они тут же съели вместе, 45% оставшихся конфет пошли Карлсону на обед, а треть конфет, оставшихся после обеда, нашла во время уборки фрекен Бок. Сколько конфет она нашла?

Ответ: 11.

Первый способ. Пусть у Карлсона перед обедом было n конфет. Тогда, после обеда их осталось $\frac{55}{100}n$, а фрекен Бок нашла $\frac{1}{3} \cdot \frac{55}{100}n = \frac{11n}{60}$ конфет. Так как количество конфет должно быть целым числом, то $11n$ делится на 60. Поскольку числа 11 и 60 — взаимно простые, то n будет кратно 60. Существует единственное число, делящееся на 60 и меньшее 111, — это число 60. Таким образом, $n = 60$, значит, фрекен Бок нашла 11 конфет.

Похожее рассуждение: если у Карлсона перед обедом было n конфет, то он съел $0{,}45n = \frac{9n}{20}$ *конфет, а так как числа* 9 *и* 20 *— взаимно простые, то n делится на* 20. *После обеда осталось* $0{,}55n = \frac{11n}{20}$ *конфет, и это число должно делиться на* 3. *Но* 11 *не делится на* 3, *поэтому на* 3 *делится число n. Таким образом, n делится на* 3 *и на*

20. *Поскольку числа* 3 *и* 20 — *взаимно простые, то* n *делится на их произведение, то есть на* 60. *Далее – см. выше.*

Второй способ. Пусть фрекен Бок нашла x конфет. Значит, после обеда оставалось $3x$ конфет, что составляет 55% конфет, имевшихся у Карлсона перед обедом. То есть, перед обедом у него было $\frac{3x \cdot 100}{55} = \frac{60x}{11}$ конфет. Поскольку количество конфет должно быть целым числом, то $60x$ делится на 11. Так как числа 11 и 60 — взаимно простые, то x будет делиться на 11, то есть $x = 11n$, где n — целое число. Из условия задачи следует, что $\frac{60x}{11} < 111$, то есть $60n < 111$. Значит, $n = 1$, тогда $x = 11$.

+ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

± *приведен верный ответ и, в целом, верное рассуждение с небольшими пробелами (например, отсутствует ссылка на взаимную простоту чисел)*

± *приведено полное обоснованное решение, но перепутан ответ (например,* 60 *вместо* 11)

∓ *использовано, но не доказано, что количество конфет перед обедом кратно* 60, *и получен верный ответ*

∓ *установлено одно из условий делимости, которому должно удовлетворять количество конфет перед обедом (например,* n *кратно* 3 *или* n *кратно* 20), *но решение не завершено или завершено неверно*

∓ *приведен верный ответ и проверено, что он удовлетворяет условию, но не доказано, что других ответов нет*

– *приведен только ответ*

7.5. В клетках квадрата 3×3 расставлены числа (см. рисунок слева).

Разрешается к числам, стоящим в двух соседних клетках, одновременно прибавлять одно и то же число, *не обязательно положительное*. Можно ли в какой-то момент получить такой квадрат с числами, как на рисунке справа? (*Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону*).

2	6	2
4	7	3
3	6	5

1	0	0
0	2	0
0	0	1

Ответ: нет, нельзя.

Разобьем все клетки квадрата на две группы. В одну группу войдут центральная клетка и 4 угловые, а в другую — оставшиеся 4 клетки. Тогда, из любых двух соседних клеток квадрата одна попадет в первую группу, а другая — во вторую.

Заметим, что в исходном квадрате суммы чисел в каждой группе между собой равны: $2 + 7 + 5 + 2 + 3 = 19$ и $6 + 4 + 3 + 6 = 19$.

Прибавляя к числам, стоящим в соседних клетках, одно и то же число, мы одинаково изменяем *сумму* всех чисел первой группы и *сумму* всех чисел второй группы. Поэтому равенство сумм чисел в группах не может нарушиться. Но во втором квадрате сумма чисел в клетках одной группы равна $1+2+1+0+0 = 4$, а сумма чисел в клетках другой группы равна $0 + 0 + 0 + 0 = 0$, поэтому такой квадрат не может получиться из исходного.

Разделение клеток квадрата на две группы соответствует «шахматной» раскраске (см. рис. 7.5).

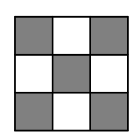


Рис. 7.5

+ *приведено полное обоснованное решение*

± *приведено верное и полное решение, основанное на прибавлении только целых чисел*

– *приведен только ответ, или ответ, подкрепленный только разбором частных случаев*